1861. ANNALEN *No.* 1.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND CXII.

I. *Zur Theorie der astatischen Nadelpaare;*
von E. du Bois-Reymond.

(Vorgetragen in der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 16. November 1860.)

Als ich vor acht Jahren in London einen Multiplicator für thierisch-elektrische Versuche von Hrn. Sauerwald's Arbeit aufstellte, stiefs ich beim Astatischmachen des Nadelpaares auf eine Schwierigkeit, die mir neu war. Das Merkmal der erreichten gröfsten Astasie eines gegebenen Nadelpaares besteht bekanntlich darin, dafs sich dasselbe senkrecht auf den magnetischen Meridian stellt [1]). Es gelang mir nun damals auch bei gröfster Vorsicht nicht, das Nadelpaar dahin zu bringen, dafs es diese Lage annähernd einnahm. Hatte sich z. B. der bezeichnete Pol der stärkeren Nadel um höchstens etwa 25° vom magnetischen Meridian entfernt, und versuchte ich durch weitere Schwächung dieser Nadel die *freiwillige Ablenkung* zu vergröfsern, so mifslang diefs stets insofern, als sofort das System durch die äquatoriale Stellung hindurchschlug, so dafs jetzt der unbezeichnete Pol derselben Nadel nur noch etwa um eben so viel vom Norden abstand. Mit anderen Worten, es schien nun bereits die stärkere Nadel die merklich schwächere geworden zu seyn, ein Zustand, bei dem man sich nicht gern beruhigt, da alsdann die Summe der Producte aus den magnetischen Momenten der beiden Nadeln in die ablenkende Stromkraft nicht so grofs wie möglich ist. Und doch zeigte diefs Nadelpaar, trotz seiner geringen oder seiner zu gro-

1) Untersuchungen über thierische Elektricität, Bd. I, Berlin 1848, S. 169.

ßen freiwilligen Ablenkung, sowohl außerhalb des Multiplicators [1]) die erforderliche Schwingungsdauer, als auch innerhalb desselben die größte nur zu erwartende Empfindlichkeit. Es übertraf in letzterer Beziehung, und unstreitig auch an Schwingungsdauer, sonst ganz ähnliche Nadelpaare, denen ich stets ohne alle Mühe die äquatoriale Stellung ertheilt hatte. Eben so wenig schien es an Stabilität seines magnetischen Zustandes hinter den besten Systemen, die ich noch gehandhabt hatte, zurückzustehen.

Die letzteren Umstände ließen mich schließen, daß die Eigenthümlichkeit dieses Nadelpaares, so leicht durch die Aequatorialebene hindurchzuschlagen, nicht wohl daher rühren könne, daß die stärkere Nadel, etwa wegen ungenügender Härtung, allzu empfindlich für den demagnetisirenden Einfluß der Streichnadel sey. So ward ich zu der Vorstellung geführt, daß jene Eigenthümlichkeit in nichts ihren Grund haben könne, als in dem vollkommneren Parallelismus, den der Künstler in diesem Falle erreicht habe, da dieß der einzige Unterschied war, den ich, für die gewöhnliche Wahrnehmung verborgen, zwischen dem neuen Nadelpaar und den älteren noch voraussetzen konnte. Eine genauere Untersuchung hat diese Meinung gerechtfertigt.

Die Gleichgewichtslage eines astatischen Systems wird bekanntlich [2]) bestimmt durch die Gleichung

$$M \sin \alpha = M' \sin \alpha'.$$

Hier bedeutet M das magnetische Moment der stärkeren Nadel, α den (spitzen) Winkel, den diese Nadel mit dem Meridiane macht, M' und α' haben die gleiche Bedeutung für die andere Nadel. Es ist aber $\alpha' = \alpha + \varphi$, wo φ den an α stoßenden spitzen Winkel vorstellt, den die magnetischen Axen der beiden Nadeln einschließen, folglich

$$M \sin \alpha = M' (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi).$$

1) Untersuchungen u. s. w., a. a. O. S. 167. 192.

2) Vergleiche Moser im Repertorium der Physik, Bd. I. Berlin 1837, S. 260. — Humphrey Lloyd in *The Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. XXII. Dublin* 1849. 4°. *P. I, p.* 249.

Da φ nur ein sehr kleiner Winkel ist, können wir setzen:

$$\cos\varphi = 1, \ \sin\varphi = \varphi \sin 1'.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M}{M - M'} \cdot \varphi \sin 1' \ . \ . \ . \ . \ . \ (\mathrm{I}).$$

Die Tangenten der freiwilligen Ablenkung, als Ordinaten aufgetragen auf den Unterschied $M - M' = d$ der magnetischen Momente als Abscissenaxe, bilden also eine auf ihre Asymptoten bezogene gleichschenkliche Hyperbel, deren Potenz dem spitzen Winkel zwischen den magnetischen Axen proportional ist. Construirt man aber die Gleichung

$$\angle\alpha = f(d)$$

für verschiedene Werthe von φ, so erhält man Curven gleich denen in Fig. 1 Taf. I, wo die gestrichelte Curve einem kleineren, die ausgezogene einem gröſseren Werthe von φ entspricht. Die Curven schlieſsen sich asymptotisch einerseits den positiven Abscissen, andererseits einer der Abscissenaxe parallelen Geraden an, deren Ordinate dem Winkelwerth von 180° entspricht. Sie schneiden die Ordinatenaxe in dem Punkte, der 90° entspricht; hier liegt zugleich ein Wendepunkt der Curven.

Aus dieser Figur erhellt die Nothwendigkeit des beschriebenen Verhaltens.

Man sieht sogleich, daſs in dem Bereich der Curven, wo sie sich der Abscissenaxe anschlieſsen, groſse Unterschiede von d nur kleinen Aenderungen von α entsprechen, in der Nähe des Nullpunktes dagegen groſse Aenderungen von α kleinen Unterschieden von d. Das System wird sich daher, wie auch die Erfahrung lehrt, wenn man die stärkere Nadel folgweise um gleiche, oder, wegen der abnehmenden Intensität der verkehrt gebrauchten Streichnadel, sogar um abnehmende Gröſsen schwächt, anfangs stets nur langsam vom Meridian entfernen, während, wenn sich die Nadeln schon mehr der Gleichheit nähern, selbst einem viel kleineren Sprunge im Unterschiede der Momente ein viel gröſserer Sprung in der freiwilligen Ablenkung folgen

kann. Hat sich der Unterschied der Nadeln umgekehrt, so kehren dieselben Erscheinungen symmetrisch wieder.

Man sieht ferner, dafs, je kleiner φ, für um so kleinere positive wie negative Werthe von d wird das System am Meridian zu kleben scheinen, und in um so gröfseren Sprüngen wird es, wenn d unter einen gewissen Werth gesunken ist, schliefslich den Aequator überschreiten. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es gelingen werde, $d = 0$ zu machen, ist natürlich von φ unabhängig und für alle Werthe desselben gleich klein. Je kleiner aber φ ist, oder je vollkommener parallel die Nadeln sind, um so gröfser wird für den kleinsten, für gewöhnlich herstellbaren positiven Werth von d die Ergänzung der freiwilligen Ablenkung zu 90°, um so kleiner folglich diese selber, um so gröfser hingegen für den kleinsten demnächst herstellbaren negativen Werth von d die freiwillige Ablenkung, um so kleiner folglich deren Ergänzung zu 180° seyn.

Was die Richtkraft des Systemes betrifft, so ist das Maafs derselben bekanntlich die Diagonale des Parallelogramms, von dem man zwei Seiten erhält, wenn man auf die beiden magnetischen Axen von ihrem Kreuzungspunkte aus Stücke im Werthe der zugehörigen magnetischen Momente aufträgt. Es bedarf kaum der Erwähnung, dafs der Werth dieser Diagonale von φ und d so abhängt, dafs derselbe für $d = 0$ durch Wachsen von φ bis 180° jede Gröfse bis zu $2M_0$ annimmt, und dafs folglich ein nahe winkelrecht zum Meridian stehendes System durch gröfseres φ an Richtkraft einem solchen überlegen seyn kann, welches bei gleichem, oder gar geringerem d, wegen kleineren φ's, sich kaum vom Meridian entfernt.

Ich habe es nicht unterlassen, diese Folgerungen durch den Versuch zu prüfen, und mich an einem zur Demonstration bestimmten astatischen System, dessen 14 Centim. lange Nadeln eine hinlänglich feine Drehung um die sie verbindende Axe gestatten, davon überzeugt, dafs mit dem spitzen Winkel zwischen den Nadeln, bei beständigem Unterschiede ihrer Momente, die freiwillige Ablenkung wächst

und die Schwingungsdauer abnimmt. Genauere Maafsbestimmungen würden nicht leicht ausführbar seyn wegen der Schwierigkeit, den kleinen Winkel zwischen den magnetischen Axen scharf zu beobachten. Sie würden übrigens keine vollkommene Uebereinstimmung mit der Rechnung ergeben. In der That hat Hr. Sauerwald seitdem noch eine andere Eigenschaft der astatischen Nadelpaare wahrgenommen, welche jedenfalls zu ihrer Erklärung ein Princip beansprucht, das in der obigen Entwickelung noch fehlt.

Man denke sich ein Nadelpaar, dessen vollkommen parallele Nadeln vollkommen gleich stark magnetisch seyen. In welcher Lage wird ein solches Nadelpaar, frei aufgehängt, in Ruhe verharren? Abgesehen von der Torsion, von Luftströmungen u. d. m., in jedem Azimuth, lautet die Antwort, die, so viel ich weifs, seit Ampère ganz allgemein auf diese Frage gegeben worden ist. Im Einklang damit wird $\operatorname{tg}\alpha$, wenn man in (I) $M = M'$ und $\varphi = 0$ setzt, unbestimmt.

Hr. Sauerwald hat mir gezeigt, dafs sich diefs nicht so verhält. Von ihm selbst gestrichen, befinden sich seine Nadelpaare vielmehr auf dem Aequator in labilem Gleichgewicht, und haben zwei stabile Gleichgewichtslagen in geringer Entfernung vom Meridian, in deren einer die obere, in der anderen die untere Nadel ihren bezeichneten Pol gen Norden kehrt.

Die Erklärung hiervon ist, wie mir scheint, leicht, und man hätte die Erscheinung, bei einigem Nachdenken, vorhersehen können. Es ist eine altbekannte, in neuerer Zeit vorzüglich durch Hrn. Poggendorff [1]) bei seinen Versuchen über die doppelsinnige Ablenkung wieder hervorgehobene, endlich ganz neuerdings von Hrn. Beetz [2]) genauer untersuchte Thatsache, dafs auch sehr harter und scheinbar bis zur Sättigung magnetisirter Stahl unter dem Einflufs äufserer magnetischer Kräfte einer vorübergehenden Magnetisirung und Demagnetisirung fähig ist. Als eine sol-

1) Diese Annalen, 1838, Bd. XLV, S. 363.
2) Ebendas. 1860, Bd. CXI, S. 107.

che äufsere Kraft mufs auf die beiden Nadeln des Systems sobald dasselbe nicht die äquatoriale Lage inne hat, die horizontale Componente des Erdmagnetismus wirken, so zwar, dafs von beiden Nadeln stets diejenige gestärkt wird, deren bezeichneter Pol nach Norden sieht, während die andere geschwächt wird. Die Stärkung, beziehlich Schwächung, jeder Nadel wird übrigens um so beträchtlicher seyn, je gröfser der Cosinus des Winkels ist, den sie mit dem Meridiane macht. Ohne Weiteres sieht man nun schon ein, dafs, wenn es sich um ein in aller Strenge paralleles und gleich starkes Nadelpaar handelt, durch die Wirkung der Erde das bewegliche Gleichgewicht aufgehoben, die beiden Aequatorialstellungen zu labilen, und die beiden Meridianstellungen zu stabilen Gleichgewichtslagen werden müssen. Um aber zu beurtheilen, was geschehe, wenn $M - M'$ und φ nicht verschwinden, ist eine mehr eingehende Betrachtung nöthig.

Jener Umstand wird in die Theorie der astatischen Nadelpaare aufgenommen, indem man in dem allgemeinen Ausdruck für die auf das System wirkenden Kräfte,

$$X\left[M \sin\alpha - M' \sin(\alpha + \varphi)\right],$$

wo X die horizontale Componente der Erdkraft, statt M und M' beziehlich setzt

$$M + m\cos\alpha,\quad M' - m'\cos(\alpha + \varphi).$$

Hier drücken m, m' die Gröfse der secundären Momente aus, welche durch die vertheilende Wirkung der Erde, gemäfs der Natur des Stahls und anderen Umständen, in jeder der Nadeln für den Fall hervorgerufen werden, dafs die zugehörige Nadel im Meridian einsteht. Man erhält, X bei Seite gelassen,

$$\left[M + m\cos\alpha\right]\sin\alpha - \left[M' - m'\cos(\alpha + \varphi)\right]\sin(\alpha + \varphi) \qquad \text{(II)}.$$

Dieser Ausdruck gestaltet sich bequemer für die Discussion, wenn man bei Betrachtung des Vorganges, statt, wie Hr. Moser und Hr. Lloyd, von der Lage des Systems, wo die stärkere Nadel im Meridian einsteht, d. h. $\alpha = 0$ ist, vielmehr ausgeht von der äquatorialen Stellung, wo

$\alpha = 90^0 - \frac{\varphi}{2}$ ist; und wenn man demgemäfs, an Stelle von α, als Veränderliche, nach deren fortschreitenden Werthen die Discussion geschehen soll, einen Winkel $\beta = 90^0 - \left(\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)$ einführt, der für die Aequatorialstellung $= 0$, in entgegengesetzter Richtung wie α wächst, und als Subtrahend von 90^0 zu $\frac{\varphi}{2}$ hinzutritt. Man hat

$$\alpha = 90^0 - \left(\beta + \frac{\varphi}{2}\right),\ \alpha + \varphi = 90^0 - \left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Der Ausdruck (II) wird dadurch zu folgendem:

$$(M - M') \cos\frac{\varphi}{2} . \cos\beta - (M + M') \sin\frac{\varphi}{2} . \sin\beta$$
$$+ \frac{(m - m')}{2} \sin\varphi . \cos 2\beta$$
$$+ \frac{(m + m')}{2} \cos\varphi . \sin 2\beta.$$

Setzt man der Einfachheit halber $m = m' = m_0$, so behält der Ausdruck nur noch die drei Glieder

$$(M - M') \cos\frac{\varphi}{2} . \cos\beta + 2m_0 \cos\frac{\varphi}{2} . \cos\beta . \sin\beta$$
$$- (M + M') \sin\frac{\varphi}{2} . \sin\beta,$$

die wir in der Reihenfolge, wie sie dastehen, mit D, $\mathfrak{M}$, Φ bezeichnen wollen. Hiervon stellt D die Kraft vor, die von der Ungleichheit der Nadeln, $\mathfrak{M}$ die, welche von der vertheilenden Wirkung der Erde, endlich Φ die, welche von dem mangelhaften Parallelismus der Nadeln herrührt. In der That verschwindet D mit d, $\mathfrak{M}$ mit m_0, Φ mit φ. Das positive Vorzeichen eines der drei Glieder bedeutet, unserer Herleitung gemäfs, dafs die dadurch vorgestellte Kraft in dem Sinne wirkt, wie die stärkere Nadel auf der Seite des Meridians, wo deren bezeichneter Pol dem Norden näher ist, als der unbezeichnete Pol der schwächeren Nadel, oder so, dafs β dadurch vergröfsert werde, das negative Vorzeichen das Gegentheil. Erinnert man sich sodann, dafs eine stabile Gleichgewichtslage dadurch bedingt

ist, dafs bei jeder Ablenkung daraus Kräfte rege werden, die das System in dieselbe zurückzuführen streben, während für das labile Gleichgewicht das Umgekehrte geschieht, so hat es schon so keine Schwierigkeit mehr, den Gang der drei Functionen um den Kreisumfang zu verfolgen, und die aus ihrem Conflict entspringenden stabilen und labilen Gleichgewichtslagen für verschiedene relative Werthe von d, φ und m_0 anzugeben.

Erleichtert wird diefs indefs noch durch die in Fig. 2 Taf. I angedeutete graphische Darstellung. Die Abscissenaxe stellt den in die vier Quadranten getheilten Kreisumfang, von $\beta = 0^0$ bis zu $\beta = 360^0$, geradlinig ausgestreckt vor. Die ausgezogene Curve bedeutet den Gang der Function $\mathfrak{M}$, die punktirte den der Function D, die gestrichelte den der Function Φ. Pfeile an den Curven geben die Wirkungsrichtung ihrer Ordinaten an. Stabile Gleichgewichtslagen finden statt, so oft die Curve, die man als allein, oder die Resultirende der Curven, die man als zusammen bestehend betrachtet, in der Richtung der positiven Abscissen verfolgt, das positive Zeichen ihrer Ordinaten mit dem negativen vertauscht; labile Gleichgewichtslagen, so oft das Gegentheil geschieht. Stabile Gleichgewichtslagen werden überdiefs durch Hinzutreten einer positiven Kraft zu denjenigen, aus deren Conflict sie entspringen, im Sinne der positiven Abscissen, durch Hinzutreten einer negativen Kraft im entgegengesetzten Sinne verschoben. Für labile Gleichgewichtslagen gilt das Gegentheil.

Von den sieben denkbaren Fällen des Einzel- und Zusammenvorkommens der drei Functionen sind physikalisch möglich nur die vier, bei denen die Function $\mathfrak{M}$ betheiligt ist. Diese sollen jetzt nach einander betrachtet werden. Erste und zweite Aequatorialstellung heifsen im Folgenden die Stellungen des Systems für $\beta = 0$ und $\beta = 180^0$, erste und zweite Meridianstellung die für $\beta = 90^0$ und 270^0.

In Fig. 3 Taf. I finden sich die jenen vier Hauptfällen und ihren Unterfällen entsprechenden Gleichgewichtslagen

des Systems in der Art angegeben, dafs die labilen Lagen durch gestrichelte, die stabilen durch ausgezogene Radien bezeichnet sind, welche der den Winkel φ hälftenden Geraden entsprechen. Die zwischen sämmtlichen Kreisen durchgezogene Gerade WO ist der Aequator, den Meridian hat man sich in jedem Kreis senkrecht darauf zu denken, den Norden wie in einer Landkarte nach oben. Bei Fig. 3, III—V. (in den übrigen Fällen kommt darauf nichts an) ist angenommen, dafs der bezeichnete Pol der stärkeren Nadel sich in der ersten Meridianstellung westlich befinde. In der ersten Aequatorialstellung ist derselbe alsdann nach Osten gekehrt; β wächst oder die Quadranten folgen aufeinander, wie es Fig. 3, I. zeigt, in der umgekehrten Richtung der Zeiger einer Uhr.

I. $d = 0$ uud $\varphi = 0$; $\mathfrak{M}$ allein ist übrig. Im Einklang mit dem bereits oben der Anschauung Entnommenen zeigt sich, dafs in der ersten und zweiten Aequatorialstellung labiles, in der ersten und zweiten Meridianstellung stabiles Gleichgewicht herrscht (Fig. 3, I.) Für $\beta = 45^\circ$, $= 135^\circ$ u. s. f. finden, wegen $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ u. s. f. beziehlich positive und negative Maxima der Kraft statt.

II. $\varphi = 0$; zugleich mit $\mathfrak{M}$ tritt die Curve D in Kraft. Die erste und zweite Aequatorialstellung sind keine labilen Gleichgewichtslagen mehr, sondern das System unterliegt darin einer Kraft beziehlich $= \pm (M - M')$. Die erste Meridianstellung ist unter allen Umständen eine stabile Gleichgewichtslage, indem die im ersten Quadranten durchweg positive Kraft im zweiten Quadranten durchweg negativ wird, wie sie es darin überhaupt stets ist, gleichviel welche Combination der drei Functionen man annehme, und welchen Werth man den Constanten beilege. Was im dritten und vierten Quadranten und in der zweiten Meridianstellung stattfinde, hängt davon ab, ob

$$2 m_0 \cos \varphi \, . \sin \beta > (M - M') \cos \frac{\varphi}{2}$$

werden könne oder nicht. Ist letzteres der Fall, so bleibt auch im dritten Quadranten die Kraft durchweg negativ,

im vierten wird sie, im Anschlufs an den ersten, wieder durchweg positiv, die zweite Meridianstellung ist eine labile Gleichgewichtslage (Fig. 3, II, *a*). Kann dagegen jene Bedingung erfüllt werden, so ist das Gleichgewicht in der zweiten Meridianstellung stabil, und zu beiden Seiten derselben findet sich symmetrisch eine labile Gleichgewichtslage (Fig. 3, II, *b*). Dieser Fall unterscheidet sich also hinsichtlich der Gleichgewichtslagen von dem I. nur insofern, als die beiden labilen Gleichgewichtslagen, deren Ort dort der Aequator war, hier sich der zweiten Meridianstellung um gleiche Bögen genähert haben; die stabilen Lagen sind dieselben auf dem Meridian.

III. $d = 0$ oder $M = M' = M_0$. $\mathfrak{M}$ und Φ kommen miteinander in Betracht. Es stellen sich sofort zwei Fälle dar.

a. Entweder nämlich ist der Unterschied

$$m_0 \cos\varphi . \cos\beta - M_0 \sin\frac{\varphi}{2}$$

schon für den kleinsten denkbaren Werth von β negativ, d. h.

$$m_0 \cos\varphi < M_0 \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Alsdann ist die erste Aequatorialstellung eine stabile Gleichgewichtslage; die Kraft bleibt in den beiden ersten Quadranten negativ, und wird für $\beta = 180^0$ positiv, so dafs daselbst labiles Gleichgewicht herrscht. In den beiden anderen Quadranten kehren die Erscheinungen symmetrisch wieder (Fig. 3, III, *a*). Die Kraft, welche bei Störung des Systems aus seinem labilen Gleichgewicht in der zweiten Aequatorialstellung um einen kleinen Winkel rege wird, ist um $2 m_0 \cos\varphi$ gröfser als die, welche bei Störung des Systems aus seinem stabilen Gleichgewicht in der ersten Aequatorialstellung um denselben Winkel entsteht.

b. Oder $m_0 \cos\varphi > M_0 \sin\frac{\varphi}{2}$: in diesem Fall ist das Gleichgewicht in der ersten Aequatorialstellung labil. Diefs wird um so leichter eintreten, je gröfser $m_0 : M_0$ und je

kleiner $\sin\frac{\varphi}{2} : \cos\varphi$, oder je kleiner φ. Da aber für 90° das mit $\cos\beta$ behaftete Glied verschwindet, so mufs im ersten Quadranten eine stabile Gleichgewichtslage stattfinden, je kleiner φ, um so näher dem Meridian, mit dem sie für $\varphi = 0$ zusammenfällt (I. Hauptfall). Die Kraft im zweiten Quadranten ist durchweg negativ, in der zweiten Aequatorialstellung herrscht labiles Gleichgewicht, in den beiden anderen Quadranten kehrt Alles symmetrisch wieder. Man hat also zwei labile Gleichgewichtslagen auf dem Aequator, und zwei stabile im ersten und vierten Quadranten (Taf. I Fig. 3, III, *b*).

IV. Weder d noch $\varphi = 0$. Alle drei Curven gelten. Weder die Aequatorial-, noch die Meridianstellungen sind ferner Gleichgewichtslagen der einen oder anderen Art, sondern in der ersten Aequatorial- und der zweiten Meridianstellung erreichen D und Φ beziehlich ihr positives, in der zweiten Aequatorial- und der ersten Meridianstellung ihr negatives Maximum. Für $\beta = 0$ findet demgemäfs eine positive Kraft $(M - M')\cos\frac{\varphi}{2}$, für $\beta = 90°$ eine negative Kraft $(M + M')\sin\frac{\varphi}{2}$ statt. Dazwischen mufs die Gleichung $D + \mathfrak{M} - \Phi = 0$ einmal erfüllt seyn, man hat also eine stabile Gleichgewichtslage im ersten Quadranten, und zwar wegen des hinzugekommenen positiven Gliedes D, wenn sonst Alles unverändert blieb, näher dem Meridian als in dem Falle III, *b*. Im zweiten Quadranten herrscht durchweg negative Kraft; unter Umständen kann hier ein Maximum vorkommen. Im dritten Quadranten findet labiles Gleichgewicht statt, an einem Punkte, welcher um weniger als 180° von der stabilen Gleichgewichtslage im ersten Quadranten absteht (Fig. 3, IV, *a*). Im vierten Quadranten kann die Kraft durchweg positiv seyn, und zwar kann sie ein Maximum oder ein Minimum besitzen. Es kann aber auch das Minimum soweit gehen, dafs die Curve die Abscissenaxe zweimal schneidet, wo denn zwischen den Schneidepunkten die Kraft negativ, der erste Schneidepunkt eine

stabile, der zweite eine labile Gleichgewichtslage wird (Fig. 3, IV, *b*). Alle Symmetrie hat also jetzt aufgehört: nur für

$$(M - M')\cos\frac{\varphi}{2} = (M + M')\sin\frac{\varphi}{2}$$

sind die stabilen und labilen Gleichgewichtslagen wieder symmetrisch angeordnet in Bezug auf den Durchmesser, der den 135°-Punkt mit dem 315°-Punkt verbindet. Die Bedingung für das Auftreten der beiden Gleichgewichtslagen im vierten Quadranten heifst alsdann

$$2m_0 \cos\varphi \cos 45^\circ > (M - M')\cos\frac{\varphi}{2} + (M + M')\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Läfst man *d* oder φ oder beide in der Vorstellung kleiner werden, so nähert sich der Zustand dem entsprechenden unter denen, die wir schon unter den einzelnen Nummern betrachtet haben. Wichtiger ist die Erwägung, was sich ereigne, wenn m_0 im Vergleich zu $M - M'$ und $\sin\frac{\varphi}{2}$ sehr klein wird, da, wenn auch m_0, wie bemerkt, physikalisch nicht $= 0$ werden kann, dieser Fall doch, wegen des unvollkommenen Parallelismus der Nadeln und ihres im Vergleich zu m_0 allzu beträchtlichen Unterschiedes, in Wirklichkeit gerade der am häufigsten vorkommende ist, ja bis zu Hrn. Sauerwald der allein beobachtete war. Wie man leicht erkennt, bestehen alsdann die beiden Gleichgewichtslagen im vierten Quadranten nicht, und die beiden anderen entfernen sich, unter sonst gleichen Umständen, je kleiner m_0, um so mehr, die stabile von der ersten Meridian-, die labile von der zweiten Aequatorialstellung, um sich dem nämlichen Durchmesser zu nähern, mit dem sie für $m_0 = 0$ zusammenfallen (Fig. 3, V.). Die Lage dieses Durchmessers, zu dessen beiden Seiten die Kräfte symmetrisch vertheilt sind, wird bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M - M'}{M + M'}\cot\frac{\varphi}{2};$$

welche mit der von Hrn. Lloyd gegebenen (I) gleichbedeutend ist, und mit Hülfe einer ähnlichen Construction

die nämlichen Schlüsse zuläfst, wobei aber die Gröfse von φ unbeschränkt bleibt.

Versucht man nunmehr das Ermittelte auf Hrn. Sauerwald's Beobachtung anzuwenden, so läfst sich so viel sagen, als dafs jedenfalls an seinen Nadelpaaren φ noch nicht ganz $= 0$ gewesen sey, weil nämlich die beiden stabilen Gleichgewichtslagen nicht in den Meridian fielen. Ob $d = 0$ war oder noch einen endlichen Werth besafs, würde davon abhangen, ob die stabilen Gleichgewichtslagen in gleichem oder in ungleichem Abstand vom Meridian, und dem entsprechend die labilen genau oder nicht genau auf dem Aequator stattfanden (vergl. Fig. 3, III, *b* und IV, *b*), worüber es an Bestimmungen gebricht. Unter allen Umständen setzt das Bemerkbarwerden der vertheilenden Wirkung der Erde voraus, dafs d und φ beide äufserst klein seyen, und Hrn. Sauerwald's Wahrnehmung liefert einen neuen Beweis dafür, dafs es ihm gelungen sey, wenn nicht die magnetische Gleichheit, doch den Parallelismus seiner Nadelpaare weiter zu treiben, als irgendwer vor ihm.

Diese Wahrnehmung lehrt uns, ohne Messung der Schwingungsdauer, die bei sehr astatischen Nadelpaaren nur unsichere Ergebnisse liefert, beurtheilen, nicht allein, ob ein gegebenes Nadelpaar den höchsten Grad der Astasie erreicht habe, dessen es vermöge des Parallelismus seiner Axen fähig ist, sondern auch, ob dieser Grad so hoch sey, wie man ihn wirklich herzustellen vermag.

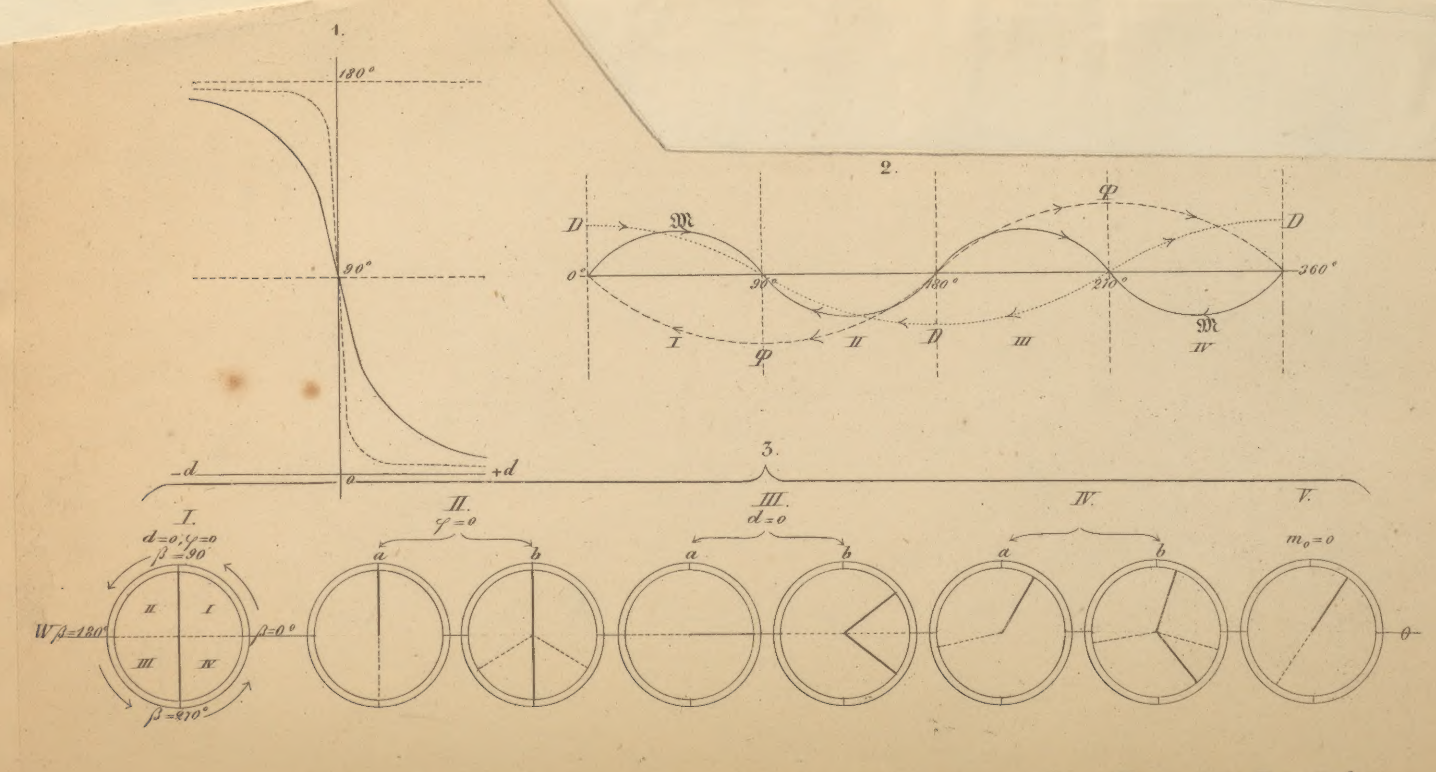
Eine messende Untersuchung so hoch astatischer Nadelpaare zur Prüfung obiger Theorie würde unter anderen fast unbesiegbaren Schwierigkeiten noch ganz besonders auf die stofsen, dafs es an einem Mittel fehlt, eine labile Gleichgewichtslage scharf zu bestimmen. Eine solche Untersuchung würde sich übrigens um so weniger der Mühe verlohnen, als man auch jetzt noch nicht auf einen vollkommenen Einklang der Erfahrung mit der Theorie rechnen dürfte. Noch immer ist diese nur als eine erste Annäherung zu betrachten, wobei mindestens zwei Umstände

vernachlässigt sind, welche scheinen bei hinreichend genauer Beobachtung zu Abweichungen Anlafs geben zu müssen.

Erstens haben wir $m = m' = m_0$ = const. gesetzt. Diefs hätte wenig zu sagen, insofern dadurch nur die Natur des Stahls u. d. m. als in beiden Nadeln innerhalb gewisser Gränzen identisch aufgefafst wäre. Allein die Einführung solcher constanten Coëfficienten überhaupt, um die Stärke der durch die Erde erzeugten secundären Momente für ein gegebenes Azimuth zu bemessen, ist nicht in aller Strenge zulässig. Sie setzt voraus, was in Wirklichkeit nicht zutrifft, dafs eine noch so stark magnetisirte Nadel durch eine äufsere magnetische Kraft einen stets dieser Kraft proportionalen positiven oder negativen Zuwachs erhalte. Bei Berücksichtigung dieses Umstandes verwickelt sich die Sache aufserordentlich, da an Stelle von m, m' neue und unbekannte Functionen der Ablenkung der Nadeln aus dem Meridiane treten.

Für's zweite ist zu bedenken, dafs auch die beiden Nadeln auf einander eine vertheilende Wirkung ausüben, durch welche sie sich gegenseitig in astatischer Anordnung verstärken, in umgekehrter schwächen [1]). Diefs würde nicht blofs zur Folge haben, dafs Messungen von M, M' an den einzelnen Nadeln, von $M - M'$ am astatischen, oder von $M + M'$ am verkehrt zusammengefügten Nadelpaar nicht mit einander stimmen könnten, sondern es würde auch die Stärke der Wirkung, welche die eine Nadel auf die andere ausübt, soviel es sich ohne Rechnung übersehen läfst, abermals eine verwickelte Function des Azimuths seyn. In der That würde für $\varphi = 0$ und $d = 0$ in den beiden Aequatorialstellungen die eine Nadel die andere eben so sehr verstärken, wie diese jene; hingegen in einer der Meridianstellungen würde die durch die Erde verstärkte Nadel die dadurch geschwächte unstreitig mehr stärken, als diese jene, so dafs der Unterschied der Nadeln in dieser Stellung kleiner als in jener ausfiele.

1) Vergl. Poggendorff in diesen Annalen, 1838, Bd. XLV, S. 375 ff.



1.
180°
90°
-d
o
+d
2.
D
𝔐
0°
90°
180°
270°
360°
Φ
I
II
III
IV
3.
I.
d=o; φ=o
β=90°
W β=180°
β=0°
β=270°
II.
φ=o
III.
d=o
IV.
V.
a
b
m₀=o
θ